

計測器校正の勘どころ

校正の不確かさ編(第4回)・不確かさの伝播則

アンリツ計測器カスタマーサービス株式会社
計測テクニカルセンター
山崎 俊雄

《はじめに》

前回は、不確かさの幅は統計学上の標準偏差をもとにした指標で表すことをお伝えしました。実際の測定では多くの不確かさの要因が存在するのですが、これらの不確かさを総合的に評価するためには不確かさの伝播則に基づく不確かさの合成をすることが必要になります。今回はこの不確かさの伝播則を考察してみましょう。

1. さまざまな不確かさ要因をどう合成するか

前回の小欄では、実際の測定において偏りやばらつきを与える多数の要因があることをご説明しました。多くの不確かさ要因の総合的な影響を求めめるためには、それらを合理的に合成しなければなりません。

そこで登場するのが、一般的に「誤差の伝播則」と呼ばれる法則です。ISO/IEC ガイド(GUM)では「誤差」に代わる用語として「不確かさ」を用いることを推奨しているので、ここでは便宜的に「誤差の伝播則」のことを「不確かさの伝播則」と呼ぶことにします。

2. 不確かさの伝播則とは

説明を単純化するために、ここではある測定結果に関わる不確かさ要因が2つに限られる場合を考えます。測定結果 z は x と y という不確かさ要因の影響を受けて変化することを式に表すと、(1)式ようになります。

$$z = f(x, y) \quad \dots (1)$$

ここで z の微小変化量 dz を考えると、微分則より(2)式が導かれます。さらに(2)式の両辺を二乗すると(3)式が得られます。

$$dz = \left(\frac{df}{dx}\right)dx + \left(\frac{df}{dy}\right)dy \quad \dots (2)$$

$$\begin{aligned} dz^2 &= \left\{ \left(\frac{df}{dx}\right)dx + \left(\frac{df}{dy}\right)dy \right\}^2 \\ &= \left(\frac{df}{dx}\right)^2 dx^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2 dy^2 + 2\left(\frac{df}{dx}\right)\left(\frac{df}{dy}\right)dx dy \\ &\dots (3) \end{aligned}$$

3. x と y の期待値を考える

このとき dz の二乗の期待値(平均値)は dz の標準偏差(σ_z)の二乗となるので、(4)式が得られます。

$$\sigma_z^2 = \left(\frac{df}{dx}\right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2 \sigma_y^2 + 2\left(\frac{df}{dx}\right)\left(\frac{df}{dy}\right)\rho_{xy}\sigma_x\sigma_y \quad \dots (4)$$

ただし、 σ_x は x の標準偏差、 σ_y は y の標準偏差、 ρ_{xy} は x と y の相関係数を表します。 x と y が無相関である場合、(4)式は簡略化されて(5)式が得られます。

$$\sigma_z^2 = \left(\frac{df}{dx}\right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2 \sigma_y^2 \quad \dots (5)$$

4. 不確かさの合成は標準偏差の二乗和の平方

ここで(5)式の df/dx と df/dy は感度係数と呼ばれています。もし、 x と z 、 y と z の相関係数が1である場合、(5)式はさらに簡略化されて(6)式となります。

$$\sigma_z^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 \quad \dots (6)$$

結局、 x と y という不確かさ要因の影響を合成する方法は、以下の(7)式ということになります。

$$\sigma_z = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2} \quad \dots (7)$$

このように、測定結果 z の不確かさは、それぞれの不確かさ要因の標準偏差(σ)を評価し、それらの二乗和の平方を計算して求めることになります。GUMでは、この不確かさの伝播則を基本概念としています。確実に押さえておきたい重要なポイントと言えるでしょう。

チェック!

ISO/IEC ガイド(GUM)では不確かさの伝播則を基本概念として測定の不確かさを評価します。測定の個々の不確かさ要因の標準偏差を求め、それらの二乗和の平方を計算して測定結果の不確かさを求めます。